

# REKURSYWNO – ADAPTACYJNA DYSKRETNA TRANSFORMACJA FOURIERA JAKO NOWE NARZĘDZIE ANALIZY SYGNAŁÓW

**Grzegorz Łukasz Augustyn**

Akademia Górniczo – Hutnicza  
Katedra Mechaniki i Wibroakustyki  
Al. A. Mickiewicza 30  
30 – 059 Kraków  
e-mail: arvo@poczta.onet.pl

*This document presents a new method for signal analysis in audio engineering and signal processing. Recursive – adaptive discrete Fourier transform (ADFT) isn't completely new method, but its extension on pattern analysis using weighted analysing harmonic functions makes possible decomposition of musical sounds and instruments. It can be very effective tool in signal processing, because it gives mathematical formulas for the new way of signal filtering. Its adaptive nature can be used for analysing highly non-stationary signals. This new approach is also useful in signal synthesis or lossless information compression. The method doesn't need a new standard for the signal processing or data transferring. It uses the same hardware and devices as conventional methods. The only limits for commercial applications of the ADFT with pattern analysis are the highest numerical complexity, very long processing time and a proper set of patterns. Future experiments will be oriented on optimalization and automatization of algorithms and construction of sets of patterns. For now, it works properly using, instead of DFT, classical FFT algorithm and other known transforms.*

## 1. Wprowadzenie

Problemy analizy i syntezy sygnałów we współczesnej inżynierii dźwięku stanowią wciąż, pomimo dobrze opracowanych i stosowanych już szeroko metod, źródło poszukiwań i badań. Są one ciągle udoskonalane, gdyż w wielu zastosowaniach, szczególnie profesjonalnych, ich naturalne ograniczenia są zbyt duże, aby mogły one działać skutecznie. Problemy te dotyczą również niezwykle szerokiej i trudnej dziedziny badań jaką jest dekompozycja sygnałów. Na gruncie inżynierii dźwięku problem dekompozycji pojawia się sporadycznie. Zazwyczaj dotyczy on usuwania szumu i zakłóceń z sygnałów tak, aby znaleźć i odseparować poszukiwaną informację. Ostatnimi czasy opracowano szereg nowych metod usuwania szumu na podstawie narzędzi wykorzystujących inteligentne systemy decyzyjne

(sieci neuronowe, logika rozmyta, zbiory przybliżone). Jeśli jednak szerzej przyjrzeć się dekompozycji sygnałów, szczególnie muzycznych, można odnieść wrażenie, że od około 10 lat nic się nie zmieniło poza mocą obliczeniową maszyn liczących i procesorów sygnałowych. Ostatnią pracą na ten temat, która stanowi syntezę stosowanych w dekompozycji metod jest praca R. Mahera [1], w której opisane są nieparametryczne metody separacji dwóch sygnałów cyfrowych.

Prezentowana poniżej rekursywno – adaptacyjna dyskretna transformacja Fouriera nie jest niczym nowym. Jednak rozszerzenie jej o postać odwracalną przekształcenia i procedurę analizy wzorców, którymi są zazwyczaj ważone funkcje harmoniczne, może posunąć badania w tej dziedzinie o krok naprzód, stanowiąc atrakcyjną alternatywę dla już stosowanych metod przetwarzania sygnałów.

## 2. Rekursywno – adaptacyjna dyskretna transformacja Fouriera

Rekursywno – adaptacyjna dyskretna transformacja Fouriera (z ang. *Recursive - Adaptive Discrete Fourier Transform*) umożliwia szybsze, niż w przypadku klasycznego algorytmu FFT, obliczenie dyskretnego widma chwilowego, nie poprzez kolejne segmentowanie przebiegu na fragmenty o długości całkowitej wielokrotności potęgi liczby dwa, ale z „próbki na próbkę”. Daje to możliwość śledzenia zmian widma sygnału w każdej chwili, zapisywanie tej informacji, modyfikowanie oraz sporządzanie map zmian sygnału na podobnej zasadzie jak w przypadku analizy McAuley’a – Quatieri’ego (MQ). Dotychczas jej zastosowanie było ograniczone ze względu na to, że możliwa była jedynie szybka analiza widmowa sygnału. Brak odpowiadającego ADFT przekształcenia odwracalnego stanowił przeszkodę w syntezie sygnałów tą metodą.

Załóżmy, że mamy dowolny ciąg danych reprezentujących badany sygnał. Dyskretna transformacja Fouriera tego sygnału ma postać:

$$X[k] = \sum_{n=1}^N x(n + \alpha) e^{-j2\pi k(n+\alpha)/N} \text{ dla ciągu znaków o długości } N, \text{ branym od próbki o indeksie } \alpha \quad (2.1)$$

Dla ciągu branego od próbki o indeksie  $\alpha+1$ , czyli od następnej próbki, mamy:

$$X_s[k] = \sum_{n=1}^N x(n + \alpha + 1) e^{-j2\pi k(n+\alpha+1)/N} \quad (2.2)$$

Zapiszmy, dla uproszczenia, że  $e^{-j2\pi kn/N} = W^{kn}$ , oraz  $\alpha=0$ , czyli:

$$X[k] = \sum_{n=1}^N x(n) W^{kn} \quad (2.3)$$

i:

$$X_s[k] = \sum_{n=1}^N x(n + 1) W^{k(n+1)} \quad (2.4)$$

Zajmijmy się ostatnim wzorem, rozpisując go w następujący sposób:

$$X_s[k] = \sum_{n=1}^{N-1} x(n+1)W^{k(n+1)} + x(N)W^{kN} \quad (2.5)$$

Wprowadźmy dodatkowe czynniki:

$$X_s[k] = -x(0) + x(0) + \sum_{n=1}^{N-1} x(n+1)W^{k(n+1)} + x(N)W^{kN} \quad (2.6)$$

Po prostych przekształceniach otrzymujemy:

$$X_s[k] = -x(0)W^{k0} + \sum_{n=1}^N x(n)W^{kn} + x(N)W^{kN} \quad (2.7)$$

Ostatecznie, uogólniając wzór dla dowolnego  $\alpha$ , mamy:

$$X_s[k] = -x(\alpha)W^{k\alpha} + \sum_{n=1}^N x(n+\alpha)W^{k(n+\alpha)} + x(N+\alpha)W^{k(N+\alpha)} \quad (2.8)$$

Jest to postać rekurencyjno – adaptacyjnej metody obliczania dyskretnego widma (ADFT) dla sygnału dyskretnego, na podstawie informacji zawartej w widmie obliczonym dla segmentu poprzedzającego bieżący, analizowany fragment. Wzór pokazuje też, że proces powtarza się z próbki na próbkę, a do implementacji w postaci algorytmu numerycznego wystarczy obliczenie postaci widma, np. poprzez algorytm FFT lub inne przekształcenie odwracalne, jedynie dla początkowego ciągu o długości N próbek.

Rozumując w podobny sposób można wyprowadzić (ze względu na zakres artykułu wprowadzenie nie będzie przytoczone) formułę dla odwrotnej ADFT. Otrzymamy wtedy wyrażenie postaci:

$$x(N+\alpha)W^{k(N+\alpha)} = X_s[k] + x(\alpha)W^{k\alpha} - \sum_{n=1}^N x(n+\alpha)W^{k(n+\alpha)} \quad (2.9)$$

co można zapisać prościej, jako:

$$x(N+\alpha) = \{X_s[k] - X[k] + x(\alpha)W^{k\alpha}\}W^{-k(N+\alpha)} \quad (2.10)$$

Jest to postać odwrotna do ADFT, czyli IADFT (z ang. *Inverse Adaptive Discrete Fourier Transform*). Chcąc wyznaczyć czynnik  $x(\alpha)$ , najlepiej jest wykonać odwrotną szybką transformację Fouriera (IFFT) widma uzyskanego z pierwszego analizowanego segmentu (pierwsze N próbek ciągu). W tym zakresie, niestety, postać czasowa sygnału uzyskana w wyniku IADFT będzie uśredniona w przedziale o długości N, jednak każda następna próbka, począwszy od N+1 próbki, będzie już aktualizowana na bieżąco.

Zaletą tej postaci przekształcenia (IADFT) jest, oprócz szybkości, zachowanie fazy sygnału, przez co unikamy problemów uśredniania w dziedzinie częstotliwości i czasu, niezgodności fazowych i amplitudowych na krańcach analizowanych przedziałów. Dzięki temu narzędzie staje się szczególnie atrakcyjne wszędzie tam, gdzie konieczny jest powrót do dziedziny czasu po wykonanej analizie w dziedzinie widma.

Algorytm ADFT posiada jednak pewną wadę, wynikającą ze sposobu obliczania, a raczej aktualizowania widma, co powoduje, że w bezpośredniej postaci nie można go

wykorzystać do analizy sygnałów szybkozmiennych. Można to określić jako brak odświeżania widma. Dopiero odpowiednia modyfikacja członu środkowego przekształcenia według wzorów 2.8 i 2.10 pozwala na analizę sygnałów o wysokim stopniu niestacjonarności, sygnałów impulsowych i transjentowych.

### 3. Analiza wzorców

Kolejna modyfikacja ADFT wraz z jej postacią odwrotną dotyczy rozszerzenia jej o analizę według zadanego wzorca. Postać funkcji wzorca może być dana poprzez jego widmo:

$$P[k] = \sum_{n=1}^N p(n) e^{-j2\pi kn/N} \quad (3.1)$$

Weźmy moduł amplitudy (pamiętajmy, że jest to widmo zespolone):

$$A[k] = \sqrt{\text{Im}(P[k])^2 + \text{Re}(P[k])^2} \quad (3.2)$$

Ze zbioru  $k$  - wartości modułów amplitud, wybierzmy największą:

$$A_{\max} = \sup\{A[k]\} \quad (3.3)$$

i względem niej unormujmy wartości amplitud widma wzorca:

$$A_n[k] = \frac{A[k]}{A_{\max}} \quad (3.4)$$

Aby pozostawić sobie możliwość ingerencji w jakość analizy za pomocą wybranego wzorca, napiszmy:

$$a_n[k] = A_n[k]^\beta \quad (3.5)$$

gdzie wykładnik  $\beta$  decyduje o ostrości maksimum obecnych w widmie wzorca.

Stąd już w bezpośredniej formie można zaimplementować powyższy wzór do 2.8, co sprawi, że przyjmie ona postać (nie będziemy tu przytaczać wyprowadzenia, gdyż nie stanowi ono większej trudności):

$$X_s[k] = -x(\alpha) A_n[k]^\beta W^{k\alpha} + \sum_{n=1}^N x(n+\alpha) A_n[k]^\beta W^{k(n+\alpha)} + x(N+\alpha) A_n[k]^\beta W^{k(N+\alpha)} \quad (3.6)$$

Otrzymane widmo, adaptacyjnie, z próbki na próbkę, śledzi zmiany sygnału według zadanego wzorca. Ilość wzorców wybrana do analizy jest dowolna. Jeżeli spodziewamy się natknąć na jakąś cechę sygnału, wystarczy wybrać odpowiednią postać wzorca i zastosować. Można w ten sposób separować dany przebieg (wg kategorii wzorca) z szumu, czy też

zakłóceń wszelkiego rodzaju, przeprowadzać jego filtrację, badać zmienność amplitud, czy wreszcie uzyskać w wyniku odwrotnej ADFT, jego postać czasową.

Powrót do dziedziny czasu to analogiczna modyfikacja IADFT danej wzorem 2.10, gdzie poszczególne składniki wyrażenia wynikają z ostatniego wzoru, czyli:

$$y'(N + \alpha) = \left\{ Y_s[k] - Y[k] + y(\alpha)W^{k\alpha} \right\} W^{-k(N+\alpha)} \quad (3.7)$$

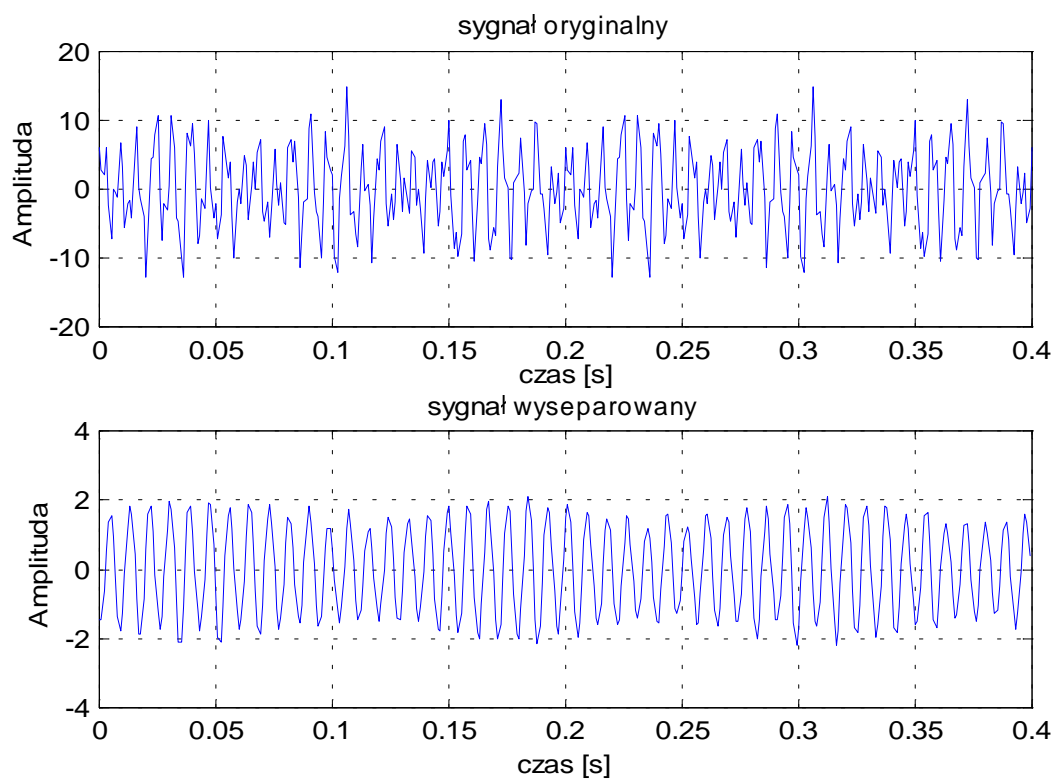
Zamiana oznaczeń  $x$  na  $y$ , oraz  $X$  na  $Y$  oznacza odpowiednio zanalizowane względem wzorca przebiegi w dziedzinie czasu i w dziedzinie częstotliwości, uzyskane w wyniku odwrotnej DFT i DFT przeprowadzonej wprost.

#### 4. Przykłady zastosowań

Jako doskonały przykład działania rekursywno – adaptacyjnej dyskretnej transformacji Fouriera z analizą wzorców można sobie wyobrazić sytuację, gdy w dowolnym sygnale, stanowiącym informację o procesie, znajduje się jedna lub kilka częstotliwości, których zmienność chcemy prześledzić. Adaptacyjne widmo takiego sygnału jest przedstawione na rys. 4.1. Efekt działania przekształcenia prostego pokazany jest na rys. 4.2, natomiast rys. 4.3 przedstawia zanalizowany sygnał w dziedzinie czasu w odniesieniu do sygnału wejściowego.

Rys. 4.1. Analiza sygnału za pomocą ADFT.

Rys. 4.2. Analiza ADFT z analizą wzorców jako śledzenie wybranej częstotliwości.



Rys. 4.3. Analiza z rys. 4.2 przedstawiona w dziedzinie czasu: a) sygnał oryginalny; b) sygnał wyseparowany metodą ADFT z analizą wzorców.

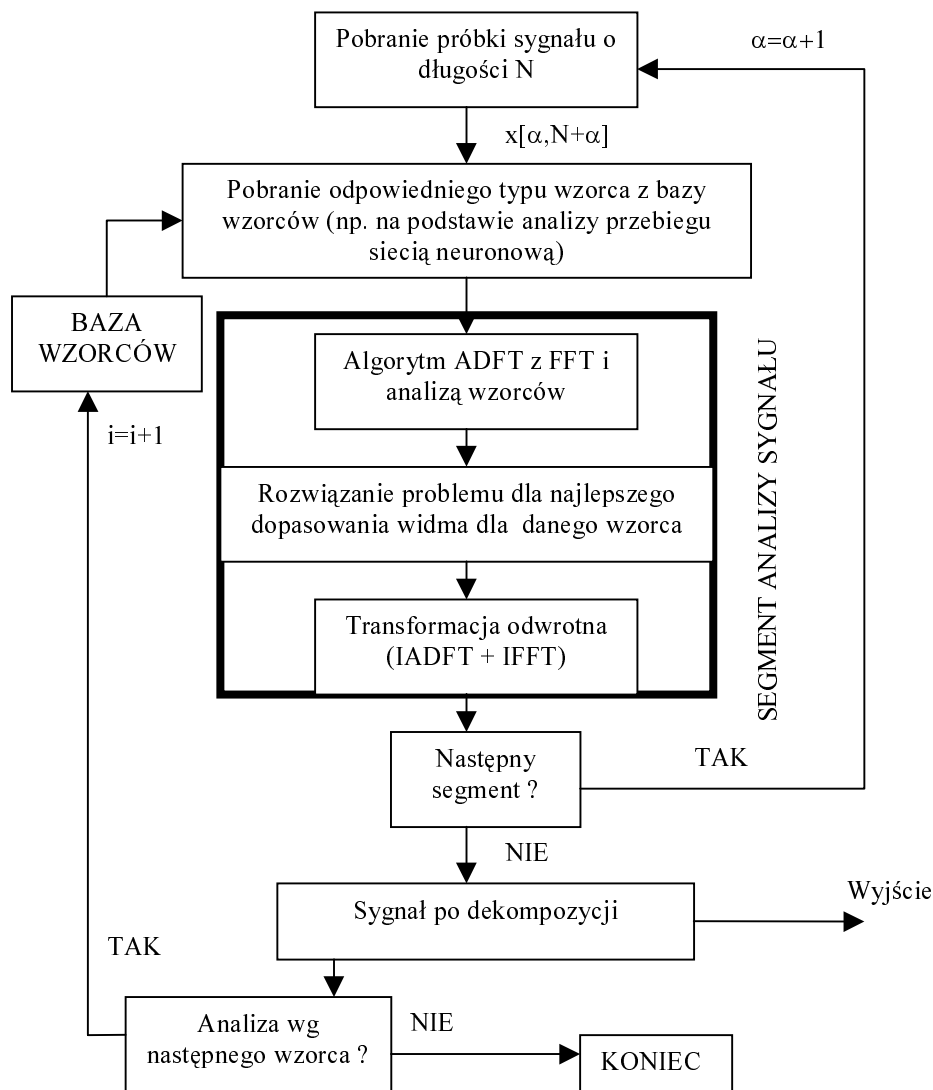
## 5. System automatycznej dekompozycji sygnałów

Separacja konkretnej cechy sygnału, o ile tylko posiadamy odpowiednio skonstruowaną bazę wzorców, może stać się procesem w dużym stopniu zautomatyzowanym. Aby to osiągnąć, należy skonstruować odpowiedni system decyzyjny do rozpoznawania obecności danego wzorca w rejestrowanym sygnale (np. sieć neuronowa). Ten sam system może także generować informację, na podstawie której realizowany będzie dobór odpowiedniego wzorca do analizy z uprzednio przygotowanej bazy. Szeroka gama zagadnień dotyczących konstrukcji takiego systemu wykracza poza ramy artykułu, jednak jako przykład można podać system do rozpoznawania i śledzenia sygnału w szumie (rys. 5.1 i rys. 5.2).

Rys. 5.1. Informacja zamaskowana szumem.

Rys. 5.2. Informacja z rys. 5.1 uzyskana w wyniku ADFT z analizą wzorców.

Schemat blokowy zautomatyzowanego systemu do analizy, syntezy lub dekompozycji z wykorzystaniem ADFT i jej postaci odwrotnej z analizą wzorców, przedstawia rys. 5.3. Jedynym problemem w implementacji takiego systemu w postaci konkretnej aplikacji jest – oprócz długiego czasu obliczeń, zależnego w dużej mierze od konkretnej maszyny liczącej – zbudowanie odpowiedniej bazy wzorców, adekwatnej do rozwiązywanego problemu.



Rys. 5.3. Schemat działania systemu analizy i dekompozycji sygnału metodą ADFT z analizą wzorców.

## 6. Wnioski

Zaprezentowana metoda przedstawia nieco inne podejście do analizy i syntezy sygnału, a także do zagadnień jego dekompozycji. W odróżnieniu od konwencjonalnych metod, przetwarzanie sygnału odbywa się tutaj bardziej na poziomie formuł matematycznych i sposobu jego reprezentacji niż na kolejnych jego modyfikacjach. Nie wpływa ono ani na sam sygnał, ani na postać informacji w nim zawartej. Metoda ta, jak i system opisany w rozdziale 5, są cały czas rozwijane, testowane i rozbudowywane w postaci coraz to nowszych aplikacji. Jego eksperymentalny charakter uniemożliwia jeszcze pełne zastosowanie, w postaci konkretnej aplikacji, w rzeczywistym świecie sygnałów. Otrzymywane wyniki pozwalają jednak przypuszczać, iż kolejne, doskonalsze wersje, będą w stanie dokonywać analizy, syntezy i dekompozycji dowolnego sygnału według zadanego wzorca zgodnie z preferencjami jego użytkowników. W takiej to formie będzie on mógł znaleźć szerokie zastosowanie we współczesnej technice audio, telekomunikacji, metrologii i identyfikacji.



## **Bibliografia**

- [1] Maher, R. C. (1990): Evaluation of a method for separating digitized duet signals. *J. Audio Eng. Soc.*, Vol. **38**, No. 12, December
- [2] Oppenheim, A. V., Schaffer, R. W. (1989): *Discrete – Time Signal Processing*. Prentice – Hall, Englewood Cliffs, New Jersey
- [3] L. R. Rabiner, B. Gold: *Theory and application of Digital Signal Processing*. Prentice – Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1975
- [4] Rutkowska, D., Piliński, M., Rutkowski L. (1999): *Sieci neuronowe, algorytmy genetyczne i systemy rozmyte*. Wydawnictwo Naukowe PWN Łódź
- [5] Soderstrom, T., Stoica, P. (1997): *Identyfikacja systemów*. Wydawnictwo Naukowe PWN Warszawa